

标准树高曲线的研制*

王明亮 唐守正

摘要 以 Schumacher 式: $H = 1.3 + \alpha e^{-b/D}$ 为基础, 分析了模型参数 a 、 b 与林分因子(优势高 H_d , 断面积平均直径 D_g 等)的关系, 结果表明: a 与优势高 H_d 的关系最为密切, b 与林分因子间的相关不紧密。确立了 $a = a_1 H_d^{b_1}$ 关系式, 建立了标准树高曲线模型: $H = 1.3 + a_1 H_d^{b_1} e^{-b_2/D}$ (简记为 smk 式)。分析表明: a_1 、 b_2 无地区显著差异, b 地区差异显著; 作为近似, 同一树种各地区间都取统一的 b 值, 估计效果仍可接受, 综合模型行为分析及拟合效果比较, smk 式优于其它模型。

关键词 标准树高曲线 Schumacher 式 地区差异

树高曲线在林业生产和实践中广泛应用。国内外学者相继研究过树高曲线随林分和时间变化的规律, 建立体现了以直径、树高关系为基础的林分树高曲线普遍规律的标准树高曲线^[1]。从数学表达来看, 从 $H = f(D)$ 出发, 导入适宜的林分因子建立 $H = f(D, \text{林分因子})$ 的树高曲线。目前, 国内外现有的标准树高曲线模型如下:

- $$\begin{aligned} (1) H &= H_m D / [(D + (H_m / H_g - 1) D_g)^{1/2}]; & (5) H &= a_1 H_d e^{a_2 D / D_g^{[3]}}; \\ (2) H &= 1.3 + a_1 H_d^{b_1} D^{a_2 H_d^{b_2 [1]}}; & (6) H &= 1.3 + (H_g - 1.3) e^{a_1(1 - D_g/D) + a_2(1/D_g - 1/D)^{[4]}}; \\ (3) H &= a_1 H_d (1 - a_2 e^{-a_3 D / D_g})^{[3]}; & (7) H &= 1.3 + (a_1 + a_2 H_d + a_3 D_g) e^{-a_4 / D^{[4]}}; \\ (4) H &= a_1 H_d (D / D_g)^{a_2 [3]}; & (8) H &= a_1 H_d (1 - a_2 e^{-a_3 D / D_g})^{a_4 [4]} \end{aligned}$$

其中, H —— 树高, D —— 胸径, H_d —— 林分优势高, D_g —— 断面积平均直径, H_g —— 断面积平均高, a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 b 、 c 、 H_m —— 模型参数。

以上标准树高曲线存在的问题: 如 3、5、8 式在 D 趋于 0 时 H 不趋于 0 或 1.3; 2、4、5 式在 D 趋于无穷大时 H 不趋于某一渐近值; 1~8 式虽引入了 H_g 兼或 D_g 因子, 但这些因子受林分密度影响较大, 在生产实践中可以得到而在模型预测中则难以嵌入。过去对某树种树高曲线规律的研究, 往往局限在该树种的某一分布区域, 对不同分布区内树高曲线的变化情况研究尚未见报道。

本文分析树高曲线变化(模型参数)与林分因子的关系, 建立一种数学解析性质良好、在模型预测和实际生产中易于应用的标准树高曲线; 分析该树高曲线在树种不同分布区的变化情况。

1 数据资料

南方五省(浙江、福建、江西、广西、湖南)杉木 [*Cunninghamia lanceolata* (Lamb.) Hook.]

1997—07—30 收稿。

王明亮研究实习员, 唐守正(中国林业科学研究院资源信息研究所 北京 100091)。

* 本文是国家自然科学基金重点项目“我国主要人工林生长模型、经营模型和优化控制”部分内容。李希菲副研究员给予帮助, 特此致谢。

测高样地 266 块,东北辽宁和吉林落叶松(*Larix olgensis* Henry)测高样地 52 块,样地面积 400~600 m²,每块样地内测高株数多于 30 株。材料情况见表 1。

表 1 样地材料统计

树种	省份	林龄(a)	密度(株/hm ²)	地位指数	样地数	观测次数
杉木	浙江	12~26	1 000~4 500	8~18	107	1
	福建	9~28	580~5 600	12~22	43	1
	江西	6~16	1 667~10 000	12~22	17	10
	湖南	6~57	1 000~8 000	12~22	68	2~5
	广西	9~21	1 000~5 000	12~18	31	2~7
落叶松	辽宁	11~42	500~5 400	16~24	41	2~7
	吉林	26~36	500~1 500	16~18	11	1

2 标准树高曲线选型

现广泛使用的树高曲线 Schumacher 式: $H = 1.3 + ae^{b/D}$ 形式简单,数学解析性质良好,可以线性化;应用浙江杉木测高样地拟合建立 107 条树高曲线,结果表明该式拟合效果良好,没有明显的系统误差。因此本文选用 Schumacher 式作为进一步研究的起点。

树高曲线随林分条件和时间的变化,可表达为模型参数与林分因子的关系。以浙江杉木材料为例,对测高样地,知其林分优势高 H_d 、断面积平均直径 D_g 、林龄 A 、密度 N (每 hm² 株数)。分别标地拟合 Schumacher 式树高曲线,得参数 a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, 107$)。分别参数 a, b 画出它们与各林分因子 H_d, D_g, A, N 的散点图;试验了 a, b 与 H_d, D_g, A, N 所有可能组合的线性模型的回归情况(结果未列出)。

结果表明: a 与优势高相关最紧密, a 中引入 H_d 后再引入其它因子对拟合效果无明显提高,故 a 仅设置为 H_d 的函数; b 与林分因子之间的相关不紧密, b 引入林分因子对原树高曲线改进甚微,故 b 不设为林分因子的函数。考虑 a 与 H_d 的两种关系式:线性式和幂函数式,两者拟合效果(相关指数)殆同,基于当 H_d 趋于 0 时,应有 a 趋于 0,并且幂函数形式基本上概适了全部的单峰曲线形式^[2],故确立 a 与 H_d 的关系式为幂函数式: $a = a_1 H_d^{b_1}$,得到标准树高曲线方程: $H = 1.3 + a_1 H_d^{b_1} e^{-b/D}$ (简记为 smk 式)。

3 标准树高曲线在树种不同分布地区的变化

3.1 参数 a_1, b_1, b 的地区性差异比较

在 smk 式 $H = 1.3 + a_1 H_d^{b_1} e^{-b/D}$ 中,参数 a_1, b_1 高度相关,因此两者视为一体来进行分析、比较。 a_1, b_1 与 b 随地区变化有 4 种可能的情况:() a_1, b_1 与 b 地区差异都显著;() a_1, b_1 地区差异显著, b 地区差异不显著;() a_1, b_1 地区差异不显著, b 地区差异显著;() a_1, b_1 与 b 地区差异都不显著。

逻辑上,上述 4 种情况仅有一为真。采用误差分布比较的方法,确定哪种可能性为真。原理如下:分别上述 4 种情况,得到各地区树高预估的误差分布。分别()、()、() 情况下误差分布与() 情况下误差分布作检验,如果某情况下误差分布与() 情况下误差分布无显著差异,则该情况为真;如果()、()、() 情况下误差分布与() 情况下误差分布均差异显

著,则()为真。事实上,当确定()、()、()某一为真时,其它应该都为假,可不再往下进行检验。为了对()、()、()与()的差异程度都有所了解,因此逐一进行比较。

相对上述 4 种情况,参数的求解(即拟合方法)如下:()以各地区测高材料分别拟合 smk 式,每地区得到一组 a_1, b_1, b 参数值。()采用设置哑变量的方法^[5],以各地区测高材料统一拟合: $H = 1.3(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)H_d^{(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)e^{-b/D}}$ 。式中 $x_1 \dots x_n$ 为对应于各地区的哑变量,当测高数据(D, H)来源于某地区时,对应的哑变量取值为 1, 否则为 0; n 为地区总数; $a_{11} \dots a_{1n}, b_{11} \dots b_{1n}$ 为对应于各地区的 a_1, b_1 参数值; b 为各地区所通用。()与()类似,也采用哑变量方法拟合下式: $H = 1.3 + a_1 H_d^{b_1} e^{-(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)/D}$ 。 $b_{11} \dots b_{1n}$ 为对应于各地区的 b 参数值, a_1, b_1 为各地区所通用。()以各地区测高材料统一拟合 smk 式,得到各地区通用的 a_1, b_1, b 参数值。上述各式的拟合由唐守正^[6]所编程序和 SAS 统计分析软件^[7]完成。

分别上述 4 种情况,以南方五省(浙江、福建、江西、广西、湖南)杉木材料为例,得到 5 省(区)树高预估误差分布(见表 2,仅列出浙江、福建、江西 3 省。()情况下误差分析未列出,从以下比较和分析结果来看,()为真;故可肯定()为假,不影响本文分析结果)。在表中的 5 省误差分布中()情况下与()情况下非常接近,其误差分布基本无偏;()情况下的误差分布则与()情况下差别较大且基本有偏。

表 2 树高预估相对误差分布(浙江,福建,江西)

(单位:%)

误差范围	频率(浙江)			频率(福建)			频率(江西)		
	- 25 以上	3.5	3.6	13.9	1.5	1.6	2.6	2.3	2.1
- 25 ~ - 20	2.7	2.8	8.1	1.4	1.4	1.6	2.1	2.2	1.5
- 20 ~ - 15	5.3	5.5	11.3	3.1	3.0	4.2	5.1	4.8	3.1
- 15 ~ - 10	8.4	8.4	14.7	7.0	6.0	7.6	9.8	9.5	6.4
- 10 ~ - 5	13.0	13.4	16.0	12.7	12.4	13.5	15.6	14.7	12.2
- 5 ~ 0	17.2	17.2	15.3	17.9	17.7	19.6	20.2	18.3	16.9
0 ~ 5	17.5	17.4	11.5	22.8	22.9	22.5	19.8	17.8	18.7
5 ~ 10	15.0	15.1	5.7	18.5	19.7	17.6	14.1	14.1	16.6
10 ~ 15	9.2	8.8	2.3	9.8	9.9	7.8	6.9	8.2	11.2
15 ~ 20	4.3	4.3	0.8	2.6	2.9	1.4	2.6	4.0	5.7
20 以上	3.9	3.5	0.4	2.7	2.5	1.6	1.5	4.3	6.4
合计	100	100	100	100	100	100	100	100	100

注: 、 、 分别表示上述三种树高预估误差分布。

误差分布的比较,近似地采用 Smirnov 检验^[8],结果见表 3。可知:在显著性水平 0.05 上,除江西外,其它 4 省()与()情况下的误差分布均无显著差异;5 省()与()情况下的误差分布均差异显著。这表明:在前述 4 种可能情况下,()为真。意即随地区不同,标准树高曲线 smk 式的变化表现在参数 b 因地区的不同而不同,参数 a_1, b_1 随地区变化不显著,各地区可视为一致。

此外,给出了 5 省()、()、() 3 种情况下误差分布的误差均值、误差方差统计表(表 4)。可知:总体而言,5 省()、()情况下误差均值的绝对值均高于()情况,三种情况下误差方差相差不大。可以认为:尽管 5 省(区)()、()情况下预估精度均低于()情况,但()情况较()情况下树高预估精度损失不大;而()情况下预估精度虽然较()情况下损失较大,但在实际应用中还是可行的。

表 3 三种误差分布的 Smirnov 检验

省(区)	、 误差分布比较 D_{n_1, n_2}	、 误差分布比较 D_{n_1, n_2}	统计量临界值 $D_n(0.05)$
浙江	0.008 4	0.312 3 [*]	0.020 4
福建	0.013 5	0.055 7 [*]	0.036 1
江西	0.057 4 ^{**}	0.149 6 [*]	0.017 6
湖南	0.038 3	0.108 7 [*]	0.038 7
广西	0.032 8	0.280 4 ^{**}	0.044 5

注: ** 示差别显著, D_{n_1, n_2} 表示由表 2 误差分布计算得到的统计量值, $D_n(0.05)$ 表示显著性水平 0.05 所对应的临界值。

表 4 南方 5 省(区) 、 、 情况下误差分布的误差均值、方差统计

省(区)	误差均值	误差方差	误差均值	误差方差	误差均值	误差方差
浙江	- 0.007 4	0.016 4	- 0.010 4	0.016 4	- 0.109 5	1.019 7
福建	0.008 3	0.010 5	0.009 2	0.010 3	- 0.009 2	0.010 6
江西	- 0.017 9	0.011 1	- 0.003 2	0.013 8	0.024 4	0.013 5
湖南	0.000 8	0.010 2	- 0.010 7	0.010 5	0.019 9	0.000 9
广西	- 0.008 8	0.006 8	- 0.012 8	0.007 0	0.046 2	0.006 6

综上所述可认为: 参数 a_1 、 b_1 地区性差异不显著, 而参数 b 地区性差异显著; 但作为近似, 5 省参数 a_1 、 b_1 、 b 都可取统一值, 只是估计精度有所降低, 但在应用上还是可接受的。

以东北辽宁和吉林落叶松材料, 也得到类似结果。

3.2 参数拟合结果

以南方五省(区)杉木材料, 拟合结果见表 5-1、5-2; 以东北辽宁和吉林落叶松材料, 拟合结果见表 6。

表 5-1 南方五省(区)杉木拟合结果(a_1 、 b_1 取统一值)

参 数	a_1	b_1	b				
			浙江	福建	江西	湖南	广西
	2.242 66	0.772 63	7.680 65	6.938 34	6.266 21	6.230 16	5.869 17
相关指数 R^2 :		0.958 8	均方误 MSE : 0.567 1				

表 5-2 南方五省(区)杉木拟合结果(a_1 、 b_1 、 b 取统一值)

参 数	a_1	b_1	b
	2.303 26	0.757 56	6.493 38
相关指数: 0.946 2	均方误: 0.740 4		

表 6 辽宁、吉林落叶松拟合结果

参 数	a_1	b_1	b	
			辽宁	吉林
	3.396 12	0.646 90	5.732 40	7.240 21
相关指数: 0.955 9	均方误: 0.860 9			

4 smk 式与其它标准树高曲线模型的比较

4.1 拟合效果的比较

以浙江杉木材料(同前)为例, 拟合模型 1~8 式和 smk 式, 采用相关指数 R^2 和均方误 MSE 为指标比较该 9 个模型整体拟合效果。再以上述各模型拟合结果分别拟合各样地, 采用

均方误 MSE 为指标, 确定 smk 式与上述各个模型拟合各具体林分的优先数; 采用符号检验, 比较 smk 式与上述各个模型拟合各具体林分效果的优劣。结果表明: 除略逊于 1、7 式外, smk 式为优。

4.2 模型行为比较

2、4 式属于幂函数式, 当 D 时, H 不趋于某一渐近值, 即不存在一上渐近线。3、8 式属于 Richards 模型范围, 构造较为复杂; 当 $D=0$ 时, H 不趋于 0 或 1.3, 在 5 式中, 当 $D=0$ 时 $H=a_1H_d$, 而当 D 时, 因为 $a_2>0$, 故 H 也不趋于一渐近值。6 式可进一步写成如下形式: $H=1.3+(H_g-1.3)e^{a_1D_g(1/D_g-1/D)+a_2(1/D_g-1/D)}$, 可以看出共线性很强, 拟合时参数值不稳定。7 式在 $H_d=0, D_g=0$ 时, 极限值 $(a_1+a_2H_d+a_3D_g)$ 并不趋向 0; 本文在分析 a 与林分因子关系时, 引入 D_g 对拟合效果改进微小, 故舍弃; 本文之所以选取 $a=a_1H_d^{b_1}$ 形式, 而没有采取 $a=a_1+a_2H_d$ 形式, 也是基于: 当 $H_d=0$ 时, 应有 $a=0$ 并且该形式基本上概括了全部的单峰曲线形式, 较之 $a=a_1+a_2H_d$ 形式有更强的适应性。

1、3~8 式都引入了 D_g 兼或 H_g 林分因子。这两个林分因子受林分密度影响比较大, 在生产中不易得到; 而优势高 H_d 受林分密度影响较小, 在生产中容易得到。

综上可知: smk 式解析性质良好, 模型形式简约, 实际拟合效果良好。从模型行为分析和实际拟合效果综合而言, smk 式优于 1~8 模型。

5 结论和讨论

(1) 以 Schumacher 式: $H=1.3+ae^{-b/D}$ 为基础, 分析了树高曲线随林分条件的变化规律即模型参数 a, b 与林分因子(优势高 H_d , 断面积平均直径 D_g 等)的关系, 结果表明: a 与优势高 H_d 的关系最为密切, b 与林分因子的相关不密切。在 Schumacher 式中可仅引入优势高 H_d (设置为 $a=a_1H_d^{b_1}$ 形式)。

(2) 建立标准树高曲线模型: $H=1.3+a_1H_d^{b_1}e^{-b_1/D}$ 。模型中引入优势高 H_d , 在生产实际中易于应用。

(3) 分析了标准树高曲线模型: $H=1.3+a_1H_d^{b_1}e^{-b_1/D}$ (模型参数 a_1, b_1, b) 随不同地区而变化的规律, 即 a_1, b_1 无地区显著差异, b 地区差异显著。但是, 不同地区间使用平均 b 值与使用不同 b 值, 其误差分析相差不大; 因此, 作为近似, 同一树种各地区间可取统一的 b 值, 尽管其预估精度有所降低, 但估计效果在实际中还是可以接受的。

(4) 综合模型行为分析及实际拟合效果, smk 式优于其它模型。

(5) 本文的研究方法可推广到树高曲线的一般形式 $H=1.3+aF(D)$; 可以推论, 渐进值参数 a 与优势高关系最为密切且可以一般地表达为 $a=a_1H_d^{b_1}$ 的形式, $F(D)$ 中的参数则有待于进一步的类似分析。

(6) 本文在模型参数的地区差异性比较中, 囿于材料所限, 地区划分采用了行政区划而未能采用更为合理的生态区划或产区区划。故本文对模型参数 a_1, b_1, b 地区差异性的分析结果仅作参考。

参 考 文 献

- 1 惠刚盈, 盛伟彤, Gadow K V, 等. 杉木人工林收获模型系统的研究. 林业科学研究, 1994, 7(4): 353~358.

- 2 李希菲, 唐守正, 袁国仁, 等. 自动调控树高曲线和一元立木材积模型. 林业科学研究. 1994, 7(5): 512 ~ 518.
- 3 Knowe S A. Effect of competition control treatments on height-age and height-diameter relationships in young Douglas-fir plantations. For. Ecol. Manage., 1994, 67: 101 ~ 111.
- 4 Hui G Y und Gadow K. Zur entwicklung von einheits hohenkurven am beispiel der baumart *Cunninghamia lanceolata*. Allg. Forst-und J.-Ztg., 1993, 164(12): 218 ~ 220.
- 5 唐守正, 李希菲. 同龄纯林自稀疏方程验证. 林业科学, 1995, 31(1): 27 ~ 34.
- 6 唐守正. IBM 系列程序集. 北京: 中国林业出版社, 1987.
- 7 高惠璇, 栾世武, 耿直. SAS 系统使用手册. 北京: 北京大学概率统计系, 1993.
- 8 陈华豪, 丁思统. 林业应用数理统计. 大连: 大连海运学院出版社, 1988.

Research on Universal Height-Diameter Curves

Wang Mingliang Tang Shouzheng

Abstract Based on Schumacher height-diameter relationship equation $H = 1.3 + ae^{-b/D}$, this paper deals with how the parameters (a and b) vary with different stand conditions. Results show that the asymptotic parameter (a) is closely correlated with the dominant height (H_d). In the above equation: $H = 1.3 + ae^{-b/D}$, parameter a may be taken the form as $a = a_1 H_d^{b_1}$, no other stand factor is necessary for being incorporated into. Then the universal height-diameter curve is constructed $H = 1.3 + a_1 H_d^{b_1} e^{-b/D}$. Further analyses show that parameters a_1 and b_1 are of no significant regional difference while parameter b is of significant regional difference. However, we may take the same value of parameter b in different regions for one tree species with lower but practically acceptable precision.

Key words universal height-diameter curve Schumacher equation regional difference

Wang Mingliang, Assistant Engineer, Tang Shouzheng (The Research Institute of Forest Resources Information and Technique, CAF Beijing 100091).