

# 灰色模型中 $e^{-a}$ 展开式及其林业应用

关键词 GM(1,1)模型 马克劳林级数 灰色递增率

灰色 GM(1,1) 模型在许多领域具有极高的实用价值, 得到广泛应用, 在林业预测分析研究中也具有重要作用。为了开发灰色信息的潜力, 本文把 GM(1,1) 模型组成, 按马克劳林级数展开, 并作应用分析。

## 1 $e^{-a}$ 和马克劳林级数

利用 GM(1,1) 模型进行预测分析, 需经过还原计算, 为此, 根据建模过程:

$$\text{一阶微分式: } X^{(1)}_{(i)} = (X^{(0)}_{(i)} - b/a) e^{-a(i+1)} + b/a \quad (1)$$

$$\text{还原公式: } X^{(0)}_{(i)} = X^{(1)}_{(i+1)} - X^{(1)}_{(i)} \quad (2)$$

$$\text{则可以导出: } X^{(0)}_{(k+1)} = (X^{(0)}_{(1)} - b/a) e^{-ak} (1 - e^a) \quad (3)$$

把  $X^{(0)}_{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 的逆级比定义为一个递增率, 为便于区别, 称为灰色递增率, 用符号

$$C_{(k+1)} \text{ 表示, 即: } C_{(k+1)} = X^{(0)}_{(k+1)} / X^{(0)}_{(k)} \quad (4)$$

把  $X^{(0)}_{(k+1)}$  和  $X^{(0)}_{(k)}$  的表达式代入(4)式, 得:

$$C_{(k+1)} = \frac{(X^{(0)}_{(1)} - b/a) e^{-ak} (1 - e^a)}{(X^{(0)}_{(1)} - b/a) e^{-a(k-1)} (1 - e^a)} = e^{-a} = C \quad (5)$$

$$\text{即: } X^{(0)}_{(k+1)} = X^{(0)}_{(k)} e^{-a} \quad (6)$$

$$\text{或: } X^{(0)}_{(k+i)} = X^{(0)}_{(k)} e^{-ai} \quad (7)$$

应用马克劳林级数展开公式, 得:

$$C = e^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} = 1 + (-a) + 1/2(-a)^2 + 1/6(-a)^3 + \dots + 1/n! (-a)^n + \dots \quad (8)$$

$$C = 1 - a + 1/2(a^2) - 1/6(a^3) + \dots + (-1)^n 1/n! (a^n) + \dots \quad (9)$$

## 2 山东省林木蓄积的马克劳林表达式

山东省属少林省份, 本研究选择有重要实际价值的立木蓄积进行应用分析。立木总蓄积量  $x_{1m}$  和“四旁”树木蓄积  $x_{2m}$  的时间序列如表 1。

表 1 山东省立木、“四旁”树蓄积(万  $m^3$ )

年 度	1976	1980	1984	1988	1992
$x_{1m}$	2 301	2 785	3 516	4 797	6 186
$x_{2m}$	1 455	1 803	2 434	3 445	4 465

应用 GM(1,1) 建模, 取不同时段的数据序列, 可得到以下参数:

1976~1992 时段:

$$a_{1m1} = -0.269 97 \quad b_{1m1} = 1 753 \quad a_{2m1} = -0.298 39 \quad b_{2m1} = 1 126$$

1980~1992 时段:

$$a_1 m_2 = -0.275\ 613 \quad b_1 m_2 = 2\ 372 \quad a_2 m_2 = -0.295\ 3 \quad b_2 m_2 = 21\ 606$$

$x_{1m}$  和  $x_{2m}$  的马克劳林表达式:

$$\begin{aligned} c_{1m_1} &= 1 - a_1 m_1 + 1/2(a_1^2 m_1) - 1/6(a_1^3 m_1) + 1/24(a_1^4 m_1) + \dots \\ &= 1 + 0.269\ 97 + 1/2 \times 0.269\ 97^2 + 1/6 \times 0.269\ 97^3 + 1/24 \times 0.269\ 97^4 + \dots \\ &\doteq 1 + 0.269\ 97 + 1/2 \times 0.073 + 1/6 \times 0.019\ 6 \end{aligned}$$

$$= 1 - a_1 m_1 + 1/2(a_1^2 m_1) - 1/6(a_1^3 m_1)$$

$$\begin{aligned} c_{2m_1} &= 1 - a_2 m_1 + 1/2(a_2^2 m_1) - 1/6(a_2^3 m_1) + 1/24(a_2^4 m_1) + \dots \\ &= 1 + 0.298\ 39 + 1/2 \times 0.298\ 39^2 + 1/6 \times 0.298\ 39^3 + 1/24 \times 0.298\ 39^4 + \dots \\ &\doteq 1 + 0.298\ 39 + 1/2 \times 0.089 + 1/6 \times 0.026\ 6 \end{aligned}$$

$$= 1 - a_2 m_1 + 1/2(a_2^2 m_1) - 1/6(a_2^3 m_1)$$

同此过程也可得到:

$$\begin{aligned} c_{1m_2} &\doteq 1 + 0.275\ 613 + 1/2 \times 0.275\ 613^2 + 1/6 \times 0.275\ 613^3 \\ &= 1 - a_1 m_2 + 1/2(a_1^2 m_2) - 1/6(a_1^3 m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2m_2} &\doteq 1 + 0.292\ 53 + 1/2 \times 0.292\ 53^2 + 1/6 \times 0.292\ 53^3 \\ &= 1 - a_2 m_2 + 1/2(a_2^2 m_2) - 1/6(a_2^3 m_2) \end{aligned}$$

### 3 模式选择和预测分析

两时段的精度分析见表 2。

表 2 精 度 分 析

模 型		(7) 式				(1) 式			
变 量		$x_{1m}$		$x_{2m}$		$x_{1m}$		$x_{2m}$	
时 段		$m_1$	$m_2$	$m_1$	$m_2$	$m_1$	$m_2$	$m_1$	$m_2$
对 残 差 值 %	1980	2.046		-1.442		2.077		-0.8138	
	1984	-1.649	-1.905	-1.437	-1.848	-1.606	-0.886	-0.648	-1.801
	1988	2.397	1.396	3.251	3.589	2.452	2.599	4.164	3.632
相对残差均值(%)	1992	0.856	-0.921	-0.783	0.313	0.913	0.517	0.347	0.381
		0.912	0.476	-0.137	0.684	0.961	0.742	0.762	0.737
验 检 差 后 关 联 度	C	0.044	0.047	0.054	0.068	0.044	0.049	0.055	0.069
	P	1	1	1	1	1	1	1	1
		0.595	0.892	0.650	0.818	0.598	0.882	0.625	0.815

从上表可知: C 值预测误差都较小, 均符合精度要求, 综合评价认为  $C_{1m_2}$  和  $C_{2m_1}$  的精度较高。以此进行预测, 到 2000 年全省立木总蓄积和“四旁”树木蓄积将分别达到 10.633 万  $m^3$  和 8 071 万  $m^3$ 。“四旁”树木蓄积占立木总蓄积的比重由 1976 年的 63% 提高到 75.9%, 这一结果反映山东少林和农区林业的特点。山东已基本消灭宜林荒山, 林分(除经济林外的乔木有林地)面积相对稳定, 且林分中防护林占 70%, 其立地条件差, 生长慢; 而山东的“四旁”树木发展快, 潜力大, 立地条件优越, 生长快, 从而使“四旁”树木蓄积增长迅速, 所占比重上升。

### 参 考 文 献

- 1 Huang Yeping, Wang Sheng. The application of multiple grey models to control problem. The Journal of Grey System, 1995, 7(4): 299 ~ 314.
- 2 邓聚龙. 灰色预测与决策. 武汉: 华中理工大学出版社, 1986. 101 ~ 134.

(山东省林业勘察设计院, 李华润 山东省农业管理干部学院, 王萍香)